

Brennweite von Linsen

1 Einführung

In diesem Laborversuch soll die Brennweite einer Sammellinse vermessen werden. Linsen sind optische Bauelemente, die ein Bild eines Gegenstandes an einer anderen Stelle des Raumes abbilden können. Dabei werden – idealerweise – alle von einem Objektpunkt ausgehenden Strahlen wieder in einem Bildpunkt vereinigt. Die Abbildung sollte darüberhinaus auch maßstabsgerecht sein. Eine Abbildung wird als *reelle Abbildung* bezeichnet, wenn die Strahlen wirklich konvergieren: der Bildraum ist dann durch die Abbildung ausgefüllt (durch Sammellinsen s. Abb.1). Ein *virtuelles Bild* entsteht bei einer Abbildung durch Streulinsen. Hier divergieren die Strahlen derart, dass sie scheinbar von einem Bildpunkt herkommen. Virtuelle Bilder können nicht direkt ohne weitere Hilfen wahrgenommen werden.

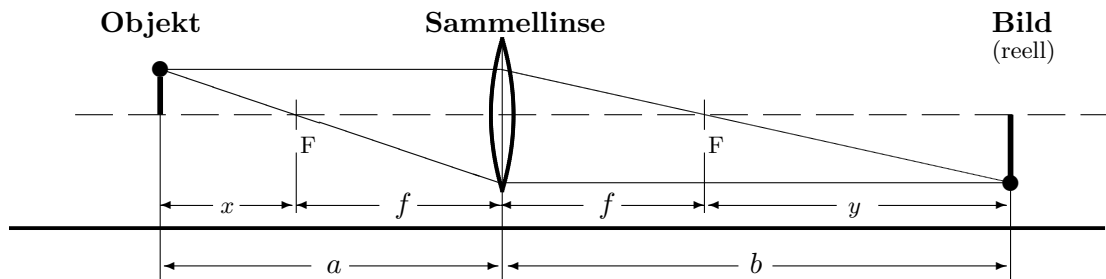


Abbildung 1: Abbildung durch eine dünne Sammellinse
Brennweite f , Objekt-/Gegenstandsweite a , Bildweite b

Linsen entstehen durch hintereinander angeordnete gekrümmte brechende Flächen. Neben der Krümmung der brechenden Flächen wird die Eigenschaft von Linsen vom Verhältnis der *Brechzahl* des Linsenmaterials (n_L) zur Brechzahl des umgebenden Mediums (Luft $n = 1$, aber auch z.B. Wasser $n_W \sim 1,3$) bestimmt. Sammellinsen (L^+) sind in der Achse dicker als am Rand. Sie vereinigen die Strahlen eines parallel einfallenden Lichtbündels im hinter der Linse liegenden *Brennpunkt*. Zerstreuungslinsen (L^-) sind dagegen in der Achse dünner als am Rand. Durch L^- wird ein parallel einfallendes Lichtbündel so zerstreut, als ob es vom vor der Linse liegendem Brennpunkt herkommen würde.

Die abbildenden Eigenschaften einer Linse werden durch ihre *Brennweite* bestimmt, d.h. durch den Abstand des Brennpunktes von der Linsenmitte („dünne Linse“) ¹. Der reziproke Wert der Brennweite $D = \frac{1}{f}$ wird als *Brechkraft* oder *Stärke* (Einheit $[D] = m^{-1}$ oder *Dioptrie*) der Linse bezeichnet. Die Brennweite von Linsen ist durch Brechzahl des Linsenmaterials und die Krümmung der Oberfläche bestimmt. Kurze Brennweiten ergeben sich bei stark brechendem Material. Der Krümmungsradius ihrer Oberfläche fließt proportional in die Brennweite ein (schwache Krümmung \rightarrow großer Radius \rightarrow große Brennweite). In Bezug auf ihre Abbildungseigenschaften verhalten sie sich symmetrisch (links und rechts gleiche Brennweiten), sofern sie an beiden Seiten vom gleichen Medium umgeben sind.

Referenz für alle Abbildungseigenschaften einer Linse ist ihre *optische Achse*. Sie geht durch den Mittelpunkt der Linse. Auf ihr liegen auch die Brennpunkte. Einfache und fehlerfreie Abbildungen erhält man nur für achsnah (*paraxial*) einfallende Strahlenbündel. Für eine von Luft umgebene Linse ergibt sich in diesem Fall folgende Linsengleichung :

$$\text{Linsengleichung } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad \text{oder} \quad x \cdot y = f^2 \quad \text{Newtonsche Abbildungsgleichung,} \quad (1)$$

¹Man kann eine Linse näherungsweise als „dünn“ bezeichnen, wenn die Brennweite sehr viel größer als die Linsendicke ist. Gilt diese Näherung nicht, ist die Brennweite der Abstand des Brennpunktes von den jeweiligen Hauptebenen.

zu den Bezeichnungen siehe Abb.1, Sammellinsen haben eine positive, Streulinsen eine negative Brennweite.

Die Eigenschaften von Linsen sowie Linsensystemen können hier nicht vollständig behandelt werden. Ich verweise auf einschlägige Lehrbücher. Hier nur einige Punkte:

- Linsen können im allgemeinen nur enge Bündel paralleler Strahlen in einem Punkt (Brennpunkt) konzentrieren. Von der optischen Achse entfernte Randstrahlen schneiden die Achse an anderer Stelle.
- Die Dispersion der Brechzahl (Brechzahl von der Wellenlänge des Lichtes abhängig) bewirkt unterschiedliche Brennweiten für unterschiedliche Farben. Abbildungen von unkorrigierten Linsensystemen weisen daher chromatische Fehler auf.
- Linsensysteme (Objektive, Okulare) verhalten sich bei Abbildungen wie eine einzelne „dicke“ Linse. Sie haben insbesondere auch eine Brennweite und es gilt Gleichung 1.
- Bei „dicken“ Linsen entspricht die Brennweite dem Abstand zwischen den Brennpunkten und den zugeordneten Hauptebenen. Die Bezugspunkte für Gegenstands- und Bildweite sind ebenfalls die zugehörigen Hauptebenen. Die Lage der Hauptebenen muß extra bestimmt werden. Bei hinreichend dünnen Linsen fallen die Hauptebenen zusammen.
- Haben die Medien beiderseits der Linse unterschiedliche Brechzahlen – n_a in Objektraum und n_b im Bildraum – so sind auch die Brennweiten unterschiedlich: $f_a \neq f_b$. Die modifizierte Abbildungsgleichung 1 lautet dann $\frac{n_a}{a} + \frac{n_b}{b} = \frac{n_a}{f_a} = \frac{n_b}{f_b}$

2 Versuchsdurchführung

In diesem Laborversuch soll die Brennweite einer Linse bestimmt werden. Dazu sind zwei Methoden anzuwenden: direkte Messung über Autokollimation und indirekte mittels der Abbildungen nach Gleichung 1. In beiden Fällen wird ein Diapositiv, das durch eine LED-Lampe intensiv beleuchtet wird, durch die zu untersuchende Linse abgebildet. Die Auswertung ist unterschiedlich.

2.1 Autokollimation

Mit Hilfe der Autokollimation kann die Brennweite einer dünnen Linse direkt gemessen werden. Führen Sie diese Messung zu erst durch. Die Versuchsanordnung ist in Abb. 2 skizziert.

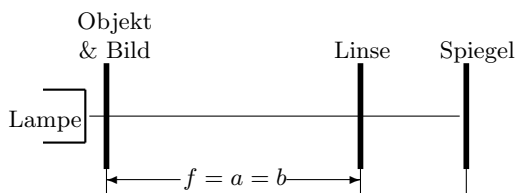


Abbildung 2: Autokollimation

Auf einer optischen Bank wird ein mit einer Lampe beleuchtetes Diapositiv als abzubildendes Objekt, die zu untersuchende Linse sowie dicht dahinter ein Planspiegel aufgebaut. Befindet sich das Objekt genau im Brennpunkt der Linse, würde das Bild in unendlicher Entfernung entstehen (Gl. 1: $a = f \Rightarrow \frac{1}{b} = 0$). Der Planspiegel kehrt die Strahlen um und es wird ein Bild, das scheinbar im Unendlichen steht, genau in der Brennebene (am Ort des ursprünglichen Objektes)

abgebildet ($a = \infty \Rightarrow \frac{1}{a} = 0$ d.h. $b = f$). Das Bild des Objektes wird also genau auf das Objekt zurückgespiegelt. Der Abstand zwischen Objekt und Linse entspricht bei richtiger Einstellung der Brennweite der Linse.

Durchführung: Stellen Sie die Lampe und die Linse auf. Der Abstand zwischen beiden sollte größer als die Brennweite sein. Justieren Sie bei eingeschalteter LED-Lampe deren Kollimatorlinse so, dass das Licht möglichst auf die Linse konzentriert wird. Das Licht der LED-Lampe wird so am effektivsten ausgenutzt. Bringen Sie jetzt das Diapositiv in den Strahlengang und stellen hinter der Linse den Spiegel auf. Der Spiegel muß so justiert (kippen, drehen) werden,

dass der Strahlengang genau umgekehrt wird, d.h. das Diapositiv beleuchtet wird (evtl. mit Blatt Papier als Schirm halbes Dia abdecken). Anschließend wird die Linse solange verschoben, bis das gespiegelte Bild auf dem ursprünglichen Objekt scharf abgebildet wird.

Es ist nicht einfach zu erkennen, wann eine Abbildung ihre maximale Schärfe erreicht. Um den Einfluss zufälliger Fehler zu verringern, sollte man die Messung unvoreingenommen mehrfach wiederholen und den Mittelwert bilden. Der Werte für die Brennweite ist somit prinzipiell mit einer gewissen Unsicherheit behaftet. Diese Unsicherheit ist abzuschätzen und mit dem Messergebnis anzugeben.

2.2 Brennweite aus Objekt- und Bildentfernung

In diesem Versuch wird das Objekt (Diapositiv) auf einem Schirm abgebildet. Aus den Werten für den Objekt- sowie den Bildabstand kann mittels Gl. 1 die Brennweite bestimmt werden.

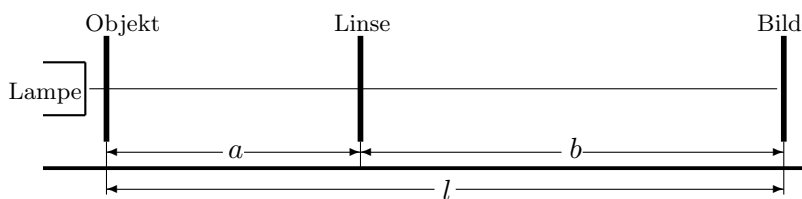


Abbildung 3: Brennweite aus Objekt- und Bildabstand

Der Messaufbau ist in Abb. 3 skizziert. Auf einer optischen Bank wird ein mit einer Lampe beleuchtetes Diapositiv als abzubildendes Objekt, die zu untersuchende Linse sowie ein Schirm, auf den das Bild projiziert wird, aufgebaut. Der Abstand l zwischen Objekt und Schirm wird

vorgegeben. Er entspricht bei richtig justierter Linse der Summe aus Objekt- und Bildabstand: $l = a + b$ (s. Abb. 3). Aus Gl. 1 ergibt sich darüberhinaus, dass es bei festem Abstand l zwischen Objekt und Schirm prinzipiell zwei Möglichkeiten gibt, ein scharfes Bild des Objektes auf dem Schirm abzubilden. Man erhält die Wertepaare (a', b') sowie (a'', b'') . Zwischen ihnen besteht die Beziehung $a'' = b'$ und $b'' = a'$. Damit diese Messung möglich ist, muss der Abstand l größer als die vierfache Brennweite sein: $a + b = l > 4 \cdot f$.

Durchführung: Stellen Sie Lampe, Diapositiv sowie den Schirm auf die optische Bank. Lampe und Diapositiv sollten dicht bei einander stehen. Der Abstand zwischen Diapositiv und Schirm sollte dagegen größer als die vierfache Brennweite sein. Justieren Sie bei eingeschalteter LED-Lampe deren Kollimatorlinse so, dass das Licht auf dem Schirm einen möglichst konzentrierten und gleichmäßig hellen Fleck bildet. Das Licht der LED-Lampe wird so am effektivsten ausgenutzt. Bringen Sie jetzt die Linse in der Nähe des Dias in den Strahlengang. Verschieben Sie nun die Linse solange in Richtung Schirm, bis das Diapositiv dort scharf abgebildet wird. Man erhält das erste Wertepaar (a', b') . Verschiebt man die Linse weiter, erhält man erneut eine scharfe Abbildung mit dem Wertepaar (a'', b'') . Daraus lassen sich nun Werte (f', f'') für die Brennweiten berechnen. Die werden auf Grund von Messfehlern unterschiedlich ausfallen.

Messung und Auswertung: Die eben beschriebenen Messung soll mit einer Linse für vier bis fünf verschiedene sinnvolle Abstände l durchgeführt werden. Aus den insgesamt acht bis zehn Wertepaaren (a, b) erhält man nun mit Gl. 1 Rohwerte für die Brennweite.

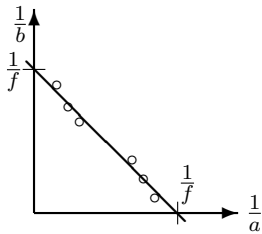
Bei allen Messungen treten zufällige² Fehler auf. Sie sind damit prinzipiell mit einer gewissen Unsicherheit behaftet. Diese Fehler fließen auch in das Endergebnis ein (Fehlerfortpflanzung). Die Abstandsmessungen sind unsicher, weil z.B. schwierig zu entscheiden ist, wann eine Abbildung optimal scharf eingestellt ist. Unsicherheiten $(\pm \Delta a$ für die Objektweite a , $\pm \Delta b$ für die Bildweite b) müssen abgeschätzt werden. Daraus kann die resultierende Unsicherheit Δf der berechneten Brennweite bestimmt werden. Mit Gl. 1 ergibt sich:

$$f = \frac{a \cdot b}{a + b} \quad \Rightarrow \quad \Delta f = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a} \cdot \Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b} \cdot \Delta b\right)^2} \quad (2)$$

²Hier werden nur zufällige Fehler berücksichtigt. Systematische Fehler, die dadurch entstehen, dass die der Messung zu Grunde gelegten physikalischen Voraussetzungen (z.B. „dünne Linse“) nicht erfüllt sind, werden nicht betrachtet.

Diese Messung soll nun auf zwei unterschiedlichen Wegen ausgewertet werden.

- Bilden Sie aus den N berechneten Werten der Brennweiten f den Mittelwert \bar{f} und die Standardabweichung σ_f . Die Unsicherheit des Mittelwertes ergibt sich dann zu $\sigma_{\bar{f}} = \pm \frac{\sigma_f}{\sqrt{N}}$. Das Messergebnis lautet nun endlich $f = \bar{f} \pm \sigma_{\bar{f}}$.
- Eine zweite Möglichkeit nutzt eine grafisch/rechnerische Methode. Nach Gl. 1 ist die Abhängigkeit der reziproken Bildweite $\frac{1}{b}$ von der reziproken Objektweite $\frac{1}{a}$ durch eine



Gerade mit der Steigung -1 und den Schnittpunkten $\frac{1}{f}$ mit den Koordinatenachsen gegeben:

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{a} \quad \text{Gerade mit Steigung} = -1, \text{ Achsenabschnitt} = \frac{1}{f}.$$

Trägt man nun alle Messwerte in die grafische Darstellung ein, so kann man eine *Ausgleichsgerade* mit der Steigung -1 nach unterschiedlichen Methoden an die Messwerte anpassen.

- Man kann die Gerade mit der Steigung -1 nach Augenmaß zeichnerisch anpassen (optimal durch die Punkte legen) und die resultierende Brennweite ablesen.
- Benutzt man ein Tabellenkalkulationsprogramm oder ein anderes Mathematikprogramm (auch ein guter Taschenrechner ist geeignet), kann man die Methode der *linearen Regression* anwenden und sich Steigung und Achsenabschnitt ausrechnen lassen. (Nachteil: man kann Steigung -1 nicht erzwingen).
- Führt man die lineare Regression unter der Zwangsbedingung Steigung $= -1$ durch, erhält man bei N Messwerten: $\frac{1}{f} = \frac{1}{N} \cdot \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{a_i} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{b_i} \right)$

Wenden Sie mindestens zwei der genannten Methoden an, und erläutern Sie evtl. unterschiedliche Ergebnisse.

Die Unsicherheit des Ergebnisses kann hier abgeschätzt werden, in dem man sich an Hand der Zeichnung überlegt, welche Geraden oberhalb und unterhalb der optimalen Geraden noch durch die Messpunkte gerechtfertigt wären.

3 Laborbericht

Stellen Sie Ihre Messungen und Ergebnisse aus den Aufgaben 2.1 und 2.2 in einem Laborbericht dar. Der Laborbericht sollte enthalten

- Kurze Beschreibung des physikalischen Hintergrundes
- Beschreibung des Versuchsablaufs
- Übersichtliche Darstellung der Messwerte einschließlich der Messfehler
- Darstellung der Auswertung, Ergebnisse und Fehler
- Zusammenfassende Würdigung des Ablaufs und der Ergebnisse